

Contrôle Intermédiaire

*L'épreuve dure 1h30. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de **justifier** les réponses.*

Les deux parties sont à rédiger sur des copies séparées. A l'intérieur de chaque partie, rédigez dans l'ordre SVP quitte à laisser des blancs et revenir sur un exercice plus tard, cela facilite grandement le travail des correcteurs.

Partie I (à rédiger sur une première copie)

Exercice 1 [4 points]

1. Définissez la convergence uniforme d'une **suite** de fonctions $(f_n)_n$ définie sur un domaine D vers une fonction f .
2. Est-ce que la suite donnée pour $n \geq 1$ par :

$$f_n(x) = \cos(nx)/\ln(1 + nx), \quad x \in]0, 1]$$

converge simplement ? Si oui, donner la limite.

3. Cette même suite converge-t-elle uniformément ?

Exercice 2 [6 points] Pour les **séries** de fonctions données par le terme général suivant pour $n \geq 1$, dites si elles convergent simplement ? uniformément ? normalement ?

1. $a_n(x) = \sin(nx)/n^2x^2, \quad x \in]0, 1]$.
2. $b_n(x) = \sin(n^2x)/n^2, \quad x \in [0, +\infty[$.
3. $c_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \quad x \in]0, 1]$.
4. $d_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, \quad x \in [1, 2]$.

Partie II (à rédiger sur une deuxième copie)

Exercice 3 [3 points] Calculer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) e^{-x}.$$

Exercice 4 [3 points] Dire si les **suites numériques** données par le terme général suivant ($n \geq 1$) convergent. Si oui, donner la limite.

1. $a_n = \cos(\pi n^2)$.
2. $b_n = 2n(1 - \cos(1/\sqrt{n}))$.
3. $c_n = (1 + \frac{1}{n})^{2n}$.

Exercice 5 [4 points] Dire si les **séries numériques** données par le terme général suivant ($n \geq 1$) convergent.

1. $u_n = \sin(\sin(1/n))$.
2. $v_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$.